Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas VI (MA-2113)
2^{do} Examen Parcial (50 %)
Sep-Dic 2008

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (12 pts.) Hallar el desarrollo de Laurent alrededor de $z = 0$ y determinar el disco de convergencia de la función

$$f(z) = \frac{1}{z^3(2z+1)^2}$$

2. (12 pts.) Sea C la circunferencia $|z| = R$ recorrida en sentido antihorario. Sea

$$g(z) = \oint_C \frac{w^3 + 4w - 2}{(w-z)^4} dw$$

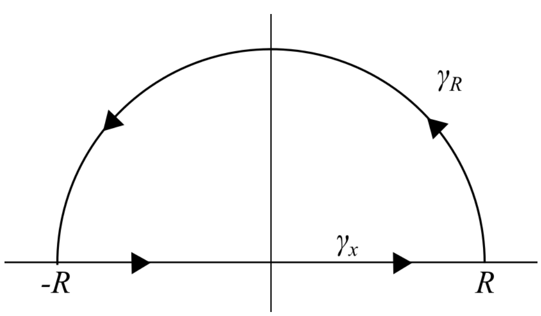
.

Demostrar que $g(z)$ es constante en

$$\{z \in \mathbb{R} : |z| > R\} \text{ y } \{z \in \mathbb{R} : |z| < R\}$$

(**Nota**: Las constantes son *diferentes* en cada región.)

3. Sea a un número real positivo.



(a) (5 pts.) Si $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}$, calcular $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ sobre el contorno $\gamma = \gamma_x + \gamma_R$ de la figura adjunta.

(b) (5 pts.) Si γ_R es la parte semicircular del contorno dado en la parte anterior, demostrar rigurosamente que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$.

(c) (4 pts.) Usar las partes anteriores para calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2} dx$$

4. (12 pts.) Sea $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $v(x,y) = e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy) + 3x$. Halar la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analítica en todo $\mathbb{C}$, cuya parte imaginaria es $v(x,y)$.